Extremos Condicionados

Problema: Determinar os extremos de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^1, no conjunto definido pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x) = 0 \end{cases} \qquad F_k \in C^1 \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Solução: Multiplicadores de Lagrange.

$$\begin{cases} Df(x) = \lambda_1 DF_1(x) + \cdots + \lambda_m DF_m(x) \\ F_1(x) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x) = 0 \end{cases} \qquad m < n$$

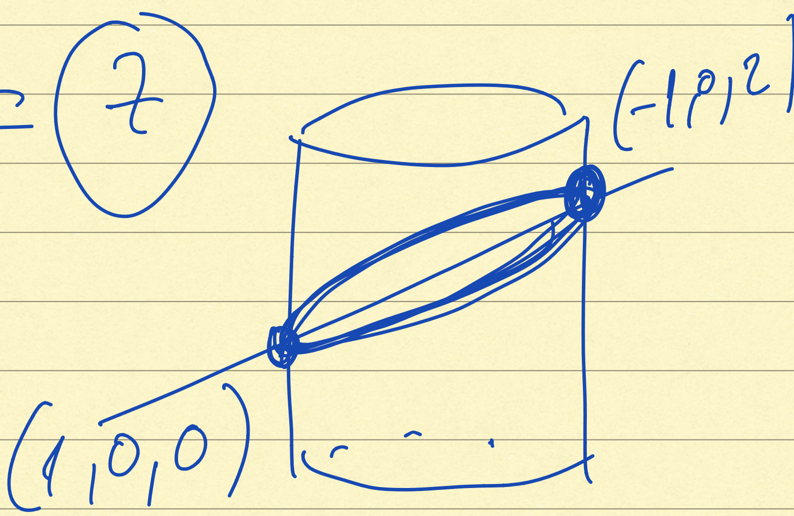
Exemplo:

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1 \; ; \; x+z=1\}$$

Determinar o ponto de M que tem coordenada z maior possível.

Solução: $f = ?$ $\quad F = ?$

$$F_1(x,y,z) = x^2+y^2-1 = 0$$
$$F_2(x,y,z) = x+z-1 = 0$$
$$f(x,y,z) = z$$



$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla F_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla F_2(x,y,z) \\ F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

5×5

$$\begin{cases} (0,0,1) = \lambda_1 (2x, 2y, 0) + \lambda_2 (1,0,1) \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 2\lambda_1 x + \overset{1}{\lambda_2} \\ \boxed{0 = 2\lambda_1 y} \\ 1 = \lambda_2 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

<u>produto</u> $\to \lambda_1 = 0 \vee y = 0$

(x,y,z)?

λ_1, λ_2 auxiliares

$$\cancel{\begin{cases} 0 = 0 + 1 \\ \lambda_1 = 0 \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \\ \_\_\_ \end{cases}} \quad \vee \quad \begin{cases} \_\_\_ \\ \boxed{y = 0} \\ \_\_\_ \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

impossível

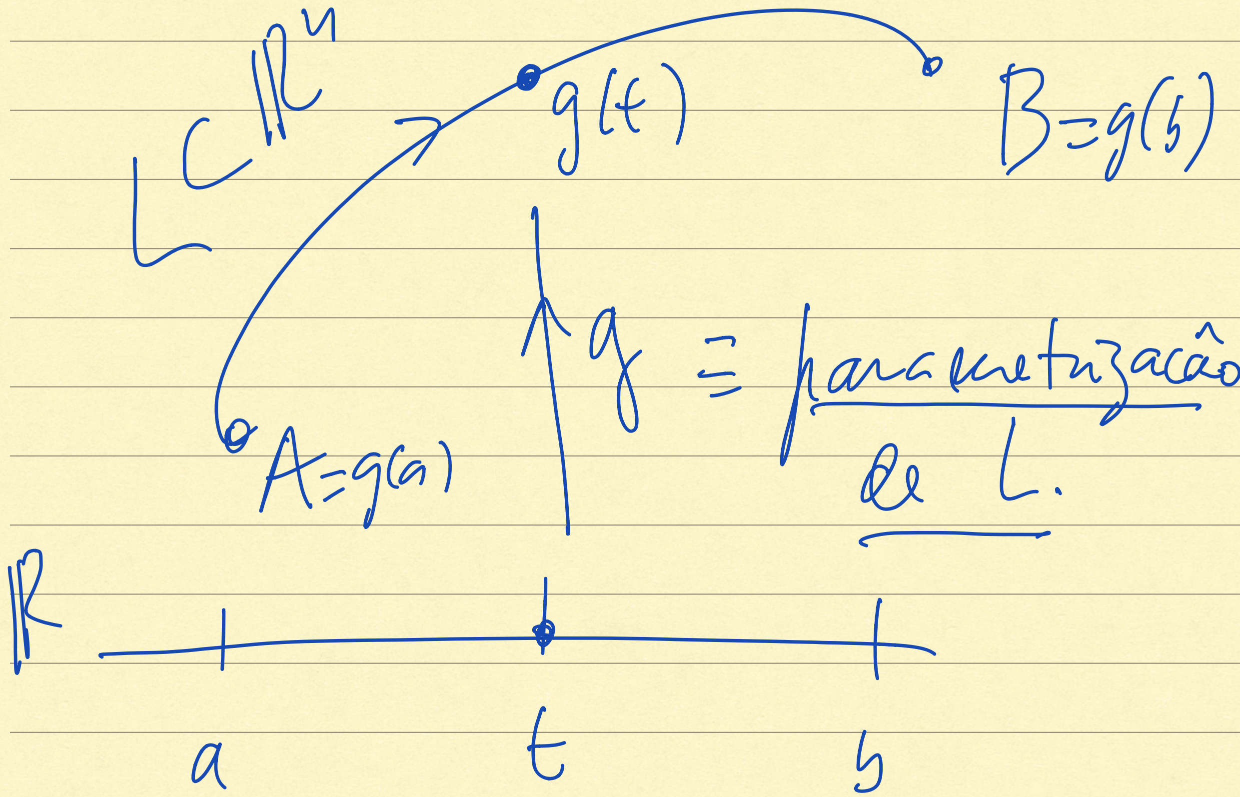
$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1 \\ z = 1 - x \end{cases}$$

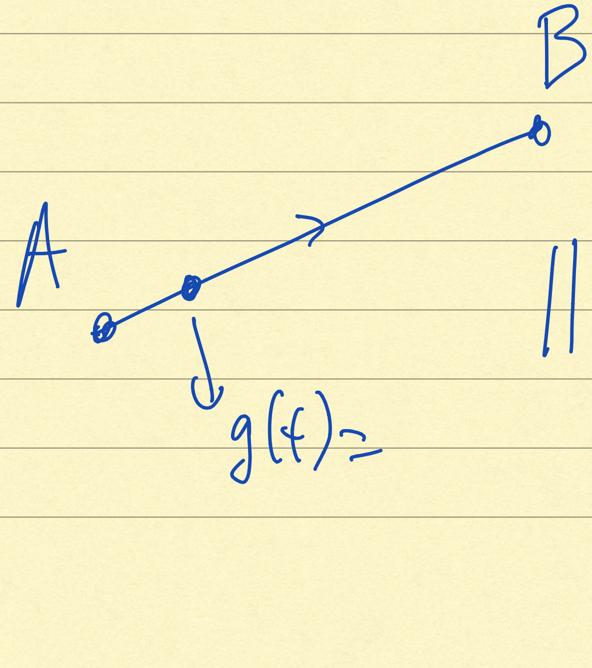
$$\boxed{\begin{matrix} (-1, 0, 2) \\ (1, 0, 0) \end{matrix}}$$

b) Ponto de M em que z é a maior possível é $(-1, 0, 2)$.

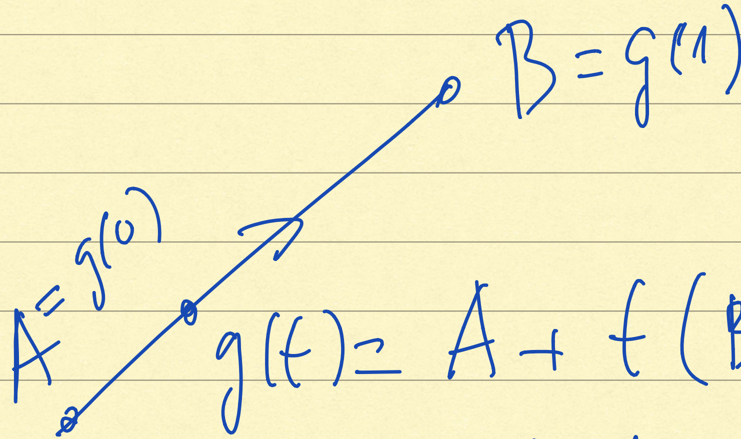
Comprimento de linhas.

$L \subset \mathbb{R}^n$, linha





$\|B - A\|$

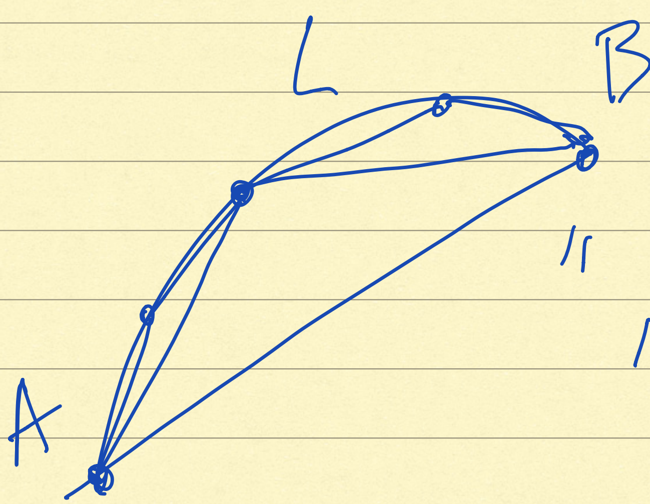


$$g(t) = A + t(B - A),$$
$$0 \le t \le 1$$

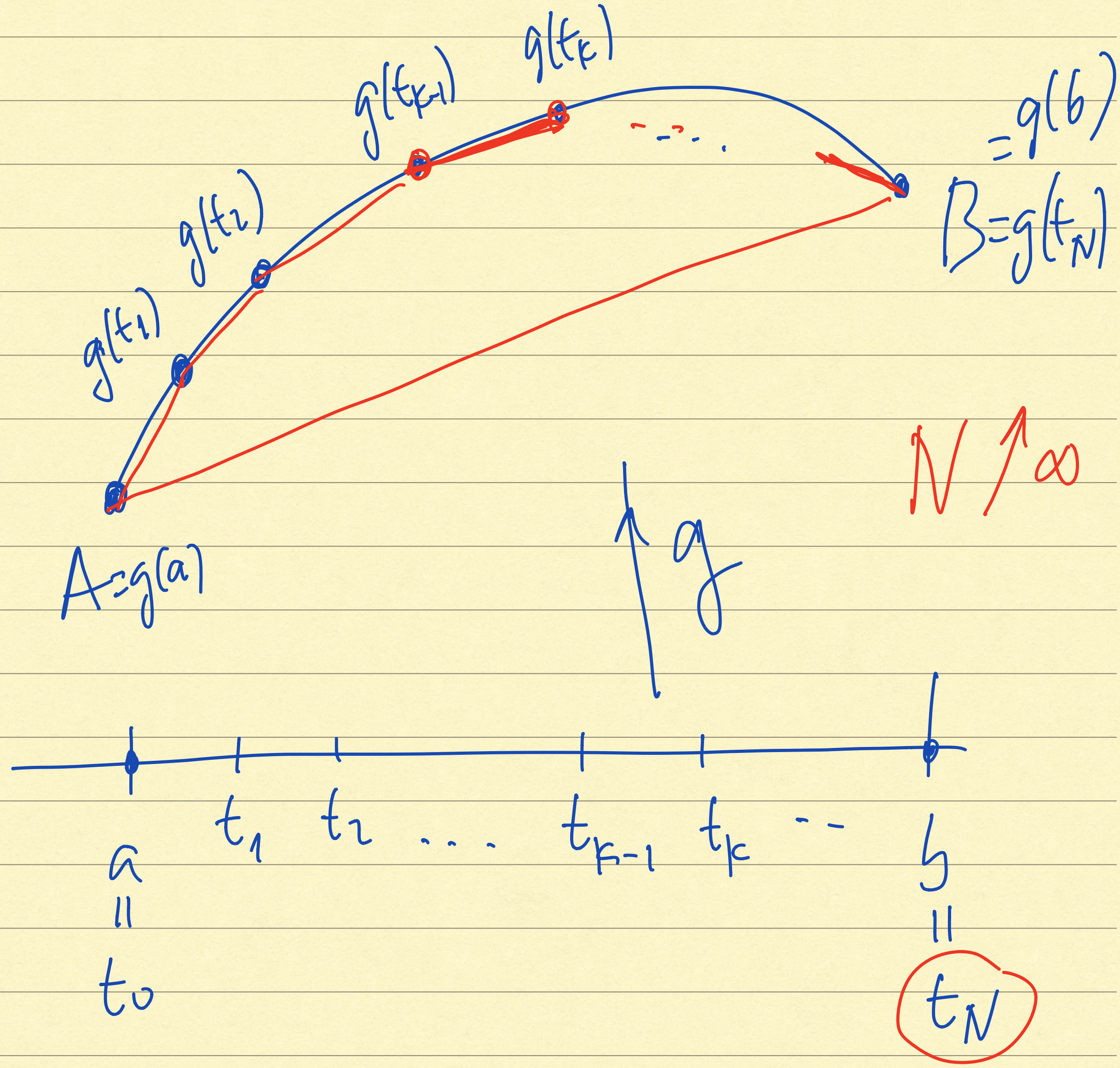
$$\| g'(t) \| = \| B - A \|$$!!!

$$\| B - A \| = \int_0^1 \| B - A \| \, dt = \int_0^1 \| g'(t) \| \, dt$$

=



"ideia"



$$\sum_{k=1}^{N} \| g(t_k) - g(t_{k-1}) \| \le \ell(L)$$

"length" $\mathrm{vol}_1(L) \equiv$ comprimento de L.

$$\sum_{k=1}^{N} \| \underbrace{g(t_k) - g(t_{k-1})} \| = \quad , \; g \in C^1$$

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} g'(t)\,dt \right\|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|g'(t)\|\,dt \quad \nearrow \quad N \uparrow \infty$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \|g'(t)\|\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \|g'(t)\|\,dt + \cdots + \int_{t_{N-1}}^{t_N} \|g'(t)\|\,dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_N} \|g'(t)\|\,dt = \int_a^b \|g'(t)\|\,dt \quad //$$

Definição: Comprimento de linha L é dado por

$$\ell(L) = \int_a^b \|g'(t)\|\,dt$$

$g(t) \equiv$ posição

$\|g'(t)\| \equiv$ velocidade escalar

velocidade escalar × tempo = espaço percorrido

!!!